Ejemplos prácticos de operaciones que no se pueden hacer en álgebra

4º ESO – 1º Bachillerato

0.- Introducción

Esta colección de errores pretende representar los errores más comunes en alumnos de 4º de ESO y Bachillerato en la asignatura de matemáticas, más concretamente en álgebra, que hace que les sea muy difícil afrontar la asignatura. Hay muchos alumnos que se olvidan que realmente las incógnitas que utilizamos representan números y que estos números son reales, y pueden ser valores como $3, 5, \pi, \sqrt{2}, \ldots$

Con este monográfico se pretende quitar el miedo a estas operaciones que parecen complicadas pero que son del todo lógicas si se ha comprendido el por qué.

1.- Expresiones algebraicas:

- Aplicar erróneamente la jerarquía de operaciones porque no se identifican correctamente los sumandos

$$(-x^2) \overset{¿?}{=} (-x)^2 \overset{¿?}{=} -x^2$$

  Para tener claros estos conceptos vale con tener clara la jerarquía de operaciones, que me indica que primero tengo que hacer antes potencias que restas, por tanto, la primera y la última expresión si son exactamente iguales, pero la segunda no:
  $(-x^2) = -x^2$, los paréntesis no son relevantes en este caso
  $(-x)^2 = (-x)(-x) = x^2$

- No saber identificar cuando hay que poner paréntesis o cuando no.
  Los paréntesis se utilizan básicamente por dos razones fundamentales:
  - para separar dos signos que afectan a un mismo monomio, dependiendo del signo de cada uno de ellos, realizaremos una tarea completamente distinta.
  - para respetar la jerarquía de operaciones cuando realizamos operaciones con varios sumandos

  Pongamos un ejemplo de cada uno de ellos:

  $-(+3) = -(3)$

  $\frac{x+3}{x-2} - \frac{-2x+1}{x^2-4} = \frac{(x+3)(x-2)}{x^2-4} - \frac{-2x+1}{x^2-4}$,

  en esta resta de fracciones algebraicas, calculado el m.c.m. y tenemos que multiplicar a $x+3$ por $x+2$ y respetando la jerarquía de operaciones, no tiene nada que ver estas operaciones dependiendo de donde pongo el paréntesis:

  - $(x+3)x+2 = x^2 + 3x + 2$
  - $x + 3(x+2) = x + 3x + 6 = 4x + 6$
  - $(x+3)(x+2) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

- Un menos delante de una fracción, lo podemos interpretar que afecta a la fracción completa, a todo el denominador o a todo el numerador, y si estos tienen varios sumandos, por tanto, cambiará el signo a todos.

Recordemos que con números $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}$

Por tanto, para cambiar el signo de una fracción algebraica podemos utilizar los siguientes métodos:

$$-\frac{x+1}{2x-2}=\frac{-(x+1)}{2x-2}=\frac{-x-1}{2x-2}=\frac{x+1}{-(2x-2)}=\frac{x+1}{-2x+2}$$

- Al hacer el cuadrado de una suma o una resta, elevar solo los dos sumandos al cuadrado
  $(x+2)^2 \neq x^2+2^2$, porque para cualquier número real que asignemos a la x, por ejemplo, 6, no se cumple que:
  $(6+2)^2 \neq 6^2+2^2$
  En este tipo de problema lo complicado es identificar cuando se trata de uno o varios sumandos, ese es el punto más difícil de interpretar, por ejemplo:
  $$\left(9(2x+5)\sqrt{3x^2+2x+3}+7\right)^2$$
  En esta operación, el segundo sumando sería el 7, el resto estaría en el primer sumando, porque la operación que realizaría la última siguiendo la jerarquía de operaciones sería la multiplicación de todo el primer sumando, y por último la suma del 7.
- Al elevar un monomio o una raíz con un número al cuadrado, elevar solo uno de los dos términos:
  $(2x)^2=4x^2$
  $\left(3\sqrt{2x+5}\right)^2=9(2x+5)$, es solo un sumando y se elevan al cuadrado ambos miembros del sumando
  $$\left(3+\sqrt{2x+5}\right)^2 \overset{\text{Cuadrado de una suma}}{=} 9+\left(\sqrt{2x+5}\right)^2+6\sqrt{2x+5}$$
  Una raíz cuadrada debemos verla como algo englobado y por tanto, muy difícilmente separable.

- Identificar erróneamente cuando se puede simplificar una fracción algebraica, porque la operación que domina no es la multiplicación/potencia/división.
  $\frac{x+5}{x} \neq 5$ puesto que para casi todos los números reales por los que se puede sustituir la x no resulta 5, por ejemplo, si $x=10$, $\frac{10+5}{10}=1{,}5 \neq 5$
  Pero hay casos en los que este ejemplo es mucho más difícil de determinar cuando se mezclan diferentes funciones, como, por ejemplo:
  $\frac{xe^x+x^2}{x^3}$ no esta claro que se puede simplificar
  En estos casos siempre se lleva a cabo sacando factor común en el numerador y denominador.
  $$\frac{xe^x+x^2}{x^3}=\frac{x(e^x+x)}{x^3}=\frac{e^x+x}{x^2}$$

- Identificar erróneamente los factores irreducibles de un polinomio para calcular el m.c.m.
  $$\frac{x(x-1)}{x^3}+\frac{x^2+5}{x^2-1}$$

En el primer denominador el factor como no hay ningún sumando es x y está elevado al cubo. En el segundo denominador x^2 no es ningún factor puesto que está involucrado en la operación resta con el 1, por tanto, este denominador al tener una resta no está factorizado y hay que factorizarlo. Así,
$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ y este denominador sí que estaría factorizado y sus factores serían $(x+1)\ y\ (x-1)$

- Sacar factor común olvidándonos el 1 que representa al sumando que tiene exactamente el factor.
  Otro de los errores comunes al sacar factor común es obviar el término que contiene el factor común completo, por ejemplo:
  $$5x^3 + x^2 \overset{factor\ común\ x^2}{=} x^2(5x+1)$$
  Pero muchos alumnos tienden a poner que :
  $$5x^3 + x^2 = x^2(5x)$$
  Lo cual es erróneo puesto que sacar factor común es la operación contraria a la propiedad distributiva, y por tanto:
  $$x^2(5x+1) \overset{prop.\ distributiva}{=} 5x^3 + x^2$$
  Que representa realmente lo que realmente queremos hacer.

- Al simplificar una expresión algebraica de repente quitar los denominadores, esto no se puede hacer, pero los alumnos lo confunden con la misma operación en las ecuaciones donde si es correcto. Veamos como se puede interpretar con números para que se entienda correctamente:
  Si se pide simplificar la fracción $\frac{36}{60}$ se irá continuamente dividiendo numerador y denominador por el mismo número hasta llegar a una fracción irreducible, pero nunca se quitarán denominadores, así:
  $\frac{36}{60} = \frac{18}{30} = \frac{6}{10}$ que no tiene nada que ver con el número 6, por tanto, el 10 no se puede eliminar.
  Sin embargo, si yo tengo una ecuación del tipo:
  $$x + \frac{2x}{5} = 49 \Leftrightarrow \frac{5x+2x}{5} = 49 \Leftrightarrow \frac{5x+2x}{5} = \frac{49\cdot 5}{5} \Leftrightarrow 7x = 49\cdot 5$$
  Porque para que dos fracciones con el mismo denominador sean iguales, los numeradores deben ser iguales.

2.- Raíces/Potencias:

- Sumar/Restar raíces de distinta base: Para poder sumar o restar raíces, éstas deben tener la misma base y exponente y en ningún caso se pueden sumar/restar si no lo cumplen.
  $$\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$$

- Simplificar sumas de potencias con raíces:
  $$\sqrt{2^2 + 4^2} \neq \sqrt{2+4}$$

3.- Ecuaciones:

- Pasar dividiendo/multiplicando al otro lado de la ecuación antes de tener un solo sumando

$3x^2+5=7 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{3} - 5$

$3x^2+5=7 \Rightarrow x^2 = \frac{7-5}{3}$

Es totalmente incorrecto, antes de pasar dividiendo, hay que tener solo un sumando en el miembro donde se encuentra la incógnita.

- Cuando elevamos al cuadrado en ambos lados tenemos que elevar a los dos miembros que están al lado del igual.

$$3x+5=\sqrt{2x-1} \Rightarrow$$
$$(3x+5)^2 = \left(\sqrt{2x-1}\right)^2$$

Pero no puede ser que $(3x)^2+5^2 = \left(\sqrt{2x-1}\right)^2$

- Cuando aplicamos/quitamos logaritmos también deben aplicar a todo el miembro en los dos lados del igual.

$$3x+5=\sqrt{2x-1}$$
$$\log(3x+5) = log\sqrt{2x-1}$$

pero no puede ser que $\log(3x)+\log(5) = log\sqrt{2x-1}$

- Igualar a cero una fracción es igualar a cero el numerador.

$$0=\frac{0}{15}=\frac{0}{34}=\frac{0}{9}$$
$$\frac{x+1}{x^{100}+2000}=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

- Igualar a cero un producto es igualar a cero cada uno de sus factores.

$$x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \; o \; (x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \; o \; x=1$$

4.- Inecuaciones:

- Al descomponer un polinomio olvidar añadir el coeficiente de la incógnita de mayor grado en la tabla para hallar el signo de la ecuación.

$$-x^2+5x-6\le 0 \Leftrightarrow$$

$-(x-2)(x-3)\le 0$, pero no tiene nada que ver con $(x-2)(x-3)\le 0$

Por tanto, si olvidamos el signo negativo, coeficiente de la incógnita de mayor grado, estaremos resolviendo la ecuación erróneamente, de hecho es justo lo contrario.

- En las inecuaciones racionales olvidar quitar los puntos que no están en el dominio. Cuando se presente la solución se debe siempre revisar que todos los puntos solución tienen sentido en la inecuación, recordando que en matemáticas hay 3 operaciones no permitidas:
  - Dividir por cero

- Raíces pares (cuadradas, cuartas, sextas, …) de números negativos.
- Logaritmos en base positiva de números negativos.

5.- Logaritmos:

- Confundir que el logaritmo de la multiplicación es la suma de logaritmos con su frase similar, el logaritmo de la suma es la multiplicación de logaritmos:
  $\log_2(8 \cdot 16) = \log_2 8 + \log_2 16$ pero no es cierto que
  $$\log_2(8 + 16) \neq \log_2 8 \cdot \log_2 16$$
- Confundir que el logaritmo de la división es la resta de logaritmos con lo contrario (similar el caso anterior).