ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Indica el tipo de variable estadística.

a) Talla de una persona.

b) Temperatura.

c) Sexo de una persona.

d) Dinero gastado a la semana.

a) Cuantitativa continua

b) Cuantitativa continua

c) Cualitativa

d) Cuantitativa discreta

002 Organiza en una tabla de frecuencias estos datos relativos al peso, en kg, de 20 personas.

42 51 56 66 75 47 51 45 63 79

69 59 50 70 59 62 54 60 63 58

Respuesta abierta.

Peso	f_i	h_i	F_i	H_i
[40, 50)	3	0,15	3	0,15
[50, 60)	8	0,4	11	0,55
[60, 70)	6	0,3	17	0,85
[70, 80)	3	0,15	20	1
	$N = 20$	$\sum h_i = 1$		

003 Lidia ha obtenido las siguientes notas en Matemáticas: 7, 5, 6, 10, 9, 7 y 6. Calcula la media, la varianza y la desviación típica.

$$\overline{x} = \frac{50}{7} = 7{,}14$$

$$\sigma^2 = \frac{376}{7} - 7{,}14^2 = 2{,}73$$

$$\sigma = 1{,}65$$

004 Se lanzan dos dados y se suman los puntos obtenidos. Halla la probabilidad de que la suma:

a) Sea 3.

b) No sea 7.

c) Sea inferior a 11.

d) Sea 4 o 5.

a) $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) $1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$

c) $1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12}$

d) $\frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{7}{36}$

ACTIVIDADES

001 Lanzamos dos dados de 6 caras.

a) Comprueba que la función que asigna a cada suceso elemental la suma de las puntuaciones es una variable aleatoria.

b) Elabora su tabla de valores y represéntala gráficamente.

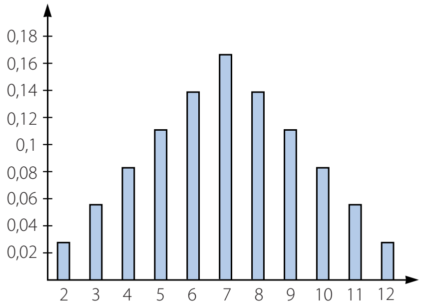
a) El espacio muestral es: $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

La función X que asigna a cada suceso la suma de las puntuaciones es una variable aleatoria.

$X(1, 1) = 2$ $X(1, 2) = 3$ $X(1, 3) = 4$ $X(1, 4) = 5$ $X(1, 5) = 6$ $X(1, 6) = 7$
$X(2, 1) = 3$ $X(2, 2) = 4$ $X(2, 3) = 5$ $X(2, 4) = 6$ $X(2, 5) = 7$ $X(2, 6) = 8$
$X(3, 1) = 4$ $X(3, 2) = 5$ $X(3, 3) = 6$ $X(3, 4) = 7$ $X(3, 5) = 8$ $X(3, 6) = 9$
$X(4, 1) = 5$ $X(4, 2) = 6$ $X(4, 3) = 7$ $X(4, 4) = 8$ $X(4, 5) = 9$ $X(4, 6) = 10$
$X(5, 1) = 6$ $X(5, 2) = 7$ $X(5, 3) = 8$ $X(5, 4) = 9$ $X(5, 5) = 10$ $X(5, 6) = 11$
$X(6, 1) = 7$ $X(6, 2) = 8$ $X(6, 3) = 9$ $X(6, 4) = 10$ $X(6, 5) = 11$ $X(6, 6) = 12$

b)

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$
6	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{12}$
7	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$
8	$\frac{5}{36}$	$\frac{13}{18}$
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{6}$
10	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$
11	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
12	$\frac{1}{36}$	1



002 Consideramos el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado y una moneda.

a) Calcula el espacio muestral y la probabilidad de cada suceso elemental.

b) Define sobre este experimento dos variables aleatorias y represéntalas.

a) El espacio muestral es:

$E = \{(1, C), (2, C), (3, C), (4, C), (5, C), (6, C), (1, X), (2, X), (3, X), (4, X), (5, X), (6, X)\}$

La probabilidad de cada suceso elemental es $\frac{1}{12}$.

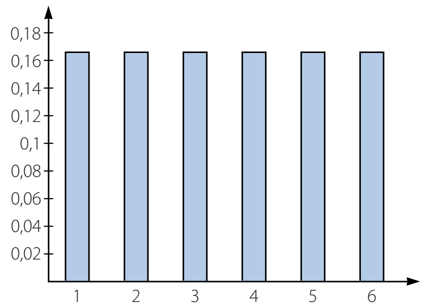
b) Respuesta abierta.

La función X asigna a cada suceso el número obtenido en el dado.

$X(1, C) = 1$ $X(2, C) = 2$ $X(3, C) = 3$ $X(4, C) = 4$ $X(5, C) = 5$ $X(6, C) = 6$

$X(1, X) = 1$ $X(2, X) = 2$ $X(3, X) = 3$ $X(4, X) = 4$ $X(5, X) = 5$ $X(6, X) = 6$

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	1

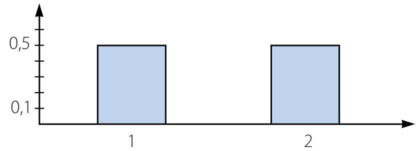


La función Y asigna a cada suceso el número elemental 1 si sale cara en la moneda y 2 si sale cruz.

$Y(1, C) = 1$ $Y(2, C) = 1$ $Y(3, C) = 1$ $Y(4, C) = 1$ $Y(5, C) = 1$ $Y(6, C) = 1$

$Y(1, X) = 2$ $Y(2, X) = 2$ $Y(3, X) = 2$ $Y(4, X) = 2$ $Y(5, X) = 2$ $Y(6, X) = 2$

Y	$P(Y = y_i)$	$P(Y \leq y_i)$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	1



003 **Consideramos la variable aleatoria que cuenta la suma de las puntuaciones al lanzar dos dados de 6 caras. Calcula los parámetros de esta variable aleatoria.**

Media: $\mu = 7$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{5{,}852} = 2{,}419$

004 **¿Puedes encontrar una variable aleatoria discreta que proceda de una variable estadística continua? ¿Y lo contrario?**

Consideramos la variable estadística cuantitativa continua «altura de las personas de un país, medida en metros». Definimos sobre esta variable estadística la variable aleatoria:

Para cada altura $h \rightarrow X(h) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad h > 1 \end{cases}$

Esta variable está definida para cualquier suceso elemental de la variable estadística, es decir, cada una de las alturas; además, es discreta, pues solo toma dos valores.

Por tanto, de una variable estadística continua se puede obtener una variable aleatoria discreta, pero no a la inversa, pues un número finito de valores no puede tener un número infinito de imágenes.

005 En el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados de 6 caras, consideramos la variable aleatoria X, que asocia a cada suceso elemental el producto de las puntuaciones que se ven. Halla y representa las funciones de probabilidad y de distribución.

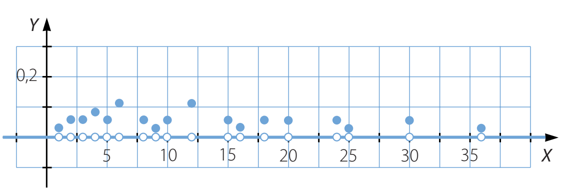
$X(1, 1) = 1$	$X(1, 2) = 2$	$X(1, 3) = 3$	$X(1, 4) = 4$	$X(1, 5) = 5$	$X(1, 6) = 6$
$X(2, 1) = 2$	$X(2, 2) = 4$	$X(2, 3) = 6$	$X(2, 4) = 8$	$X(2, 5) = 10$	$X(2, 6) = 12$
$X(3, 1) = 3$	$X(3, 2) = 6$	$X(3, 3) = 9$	$X(3, 4) = 12$	$X(3, 5) = 15$	$X(3, 6) = 18$
$X(4, 1) = 4$	$X(4, 2) = 8$	$X(4, 3) = 12$	$X(4, 4) = 16$	$X(4, 5) = 20$	$X(4, 6) = 24$
$X(5, 1) = 5$	$X(5, 2) = 10$	$X(5, 3) = 15$	$X(5, 4) = 20$	$X(5, 5) = 25$	$X(5, 6) = 30$
$X(6, 1) = 6$	$X(6, 2) = 12$	$X(6, 3) = 18$	$X(6, 4) = 24$	$X(6, 5) = 30$	$X(6, 6) = 36$

X	$P(X = x_i)$	$P(X \le x_i)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$
5	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$
6	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$
8	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{9}$
9	$\frac{1}{36}$	$\frac{17}{36}$

X	$P(X = x_i)$	$P(X \le x_i)$
10	$\frac{1}{18}$	$\frac{19}{36}$
12	$\frac{1}{9}$	$\frac{23}{36}$
15	$\frac{1}{18}$	$\frac{25}{36}$
16	$\frac{1}{36}$	$\frac{13}{18}$
18	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{9}$
20	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{6}$
24	$\frac{1}{18}$	$\frac{8}{9}$
25	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{12}$
30	$\frac{1}{18}$	$\frac{35}{36}$
36	$\frac{1}{36}$	1

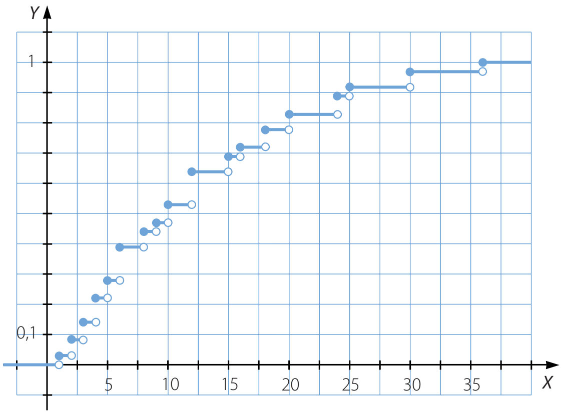
La función de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } x = 1, 9, 16, 25, 36 \\ \frac{1}{18} & \text{si } x = 2, 3, 5, 8, 10, 15, 18, 20, 24, 30 \\ \frac{1}{12} & \text{si } x = 4 \\ \frac{1}{9} & \text{si } x = 6, 12 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

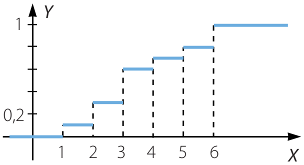


La función de distribución es:

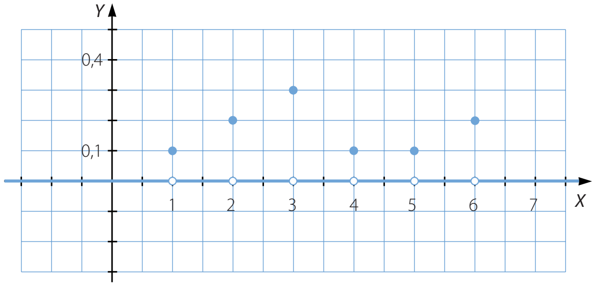
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 1 \\ \dfrac{1}{36} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \dfrac{1}{12} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ \dfrac{5}{36} & \text{si } 3 \le x < 4 \\ \dfrac{2}{9} & \text{si } 4 \le x < 5 \\ \dfrac{5}{18} & \text{si } 5 \le x < 6 \\ \dfrac{7}{18} & \text{si } 6 \le x < 8 \\ \dfrac{4}{9} & \text{si } 8 \le x < 9 \\ \dfrac{17}{36} & \text{si } 9 \le x < 10 \\ \dfrac{19}{36} & \text{si } 10 \le x < 12 \\ \dfrac{23}{36} & \text{si } 12 \le x < 15 \\ \dfrac{25}{36} & \text{si } 15 \le x < 16 \\ \dfrac{13}{18} & \text{si } 16 \le x < 18 \\ \dfrac{7}{9} & \text{si } 18 \le x < 20 \\ \dfrac{5}{6} & \text{si } 20 \le x < 24 \\ \dfrac{8}{9} & \text{si } 24 \le x < 25 \\ \dfrac{11}{12} & \text{si } 25 \le x < 30 \\ \dfrac{35}{36} & \text{si } 30 \le x < 36 \\ 1 & \text{si } 36 \le x < +\infty \end{cases}$$



006 **Esta es la gráfica de una función de distribución. Halla y representa la función de probabilidad.**



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 1 \\ 0{,}1 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 0{,}3 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 0{,}6 & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 0{,}7 & \text{si } 4 \le x < 5 \\ 0{,}8 & \text{si } 5 \le x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \le x < +\infty \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{si } x = 1, 4, 5 \\ 0{,}2 & \text{si } x = 2, 6 \\ 0{,}3 & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



007 **Comprueba si la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale un 5, al lanzar 4 veces un dado de seis caras, sigue una distribución binomial.**

La variable es discreta, porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 y 4.

$n = 4$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Salir un 5», entonces $P(A) = \frac{1}{6}$.

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en un lanzamiento no influye en el siguiente.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(4, \frac{1}{6}\right)$

008 **Calcula la probabilidad de que la variable aleatoria, X, que cuenta el número de veces que sale un 5 en 4 tiradas de un dado, sea mayor o igual que 3.**

$$P(X \ge 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0{,}0162$$

009 **Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que obtengo, al sacar tres veces una bola de un recipiente que contiene 2 bolas blancas y 3 rojas, y después de anotar el color, devolver la bola al recipiente. Calcula la probabilidad de que obtenga 2 bolas blancas.**

$$X \equiv B\left(3, \frac{2}{5}\right) \qquad P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = 0{,}288$$

010 Si consideramos el mismo experimento de la actividad anterior, calcula.

a) La probabilidad de que todas las bolas sean del mismo color.

b) La probabilidad de obtener alguna bola de color rojo.

a) $P(X=3)+P(X=0)=\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^0+\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3=0{,}28$

b) $1-P(X=3)=1-\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^0=0{,}936$

011 Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que obtengo, al sacar tres veces una bola de un recipiente que contiene 2 bolas blancas y 3 rojas, y después de anotar el color, devolver la bola al recipiente. Calcula, utilizando la tabla de la distribución binomial, la probabilidad de que haya anotado 2 bolas blancas.

$X\equiv B(3;\,0{,}4)$

$P(X=2)=0{,}288$

012 Si consideramos el mismo experimento de la actividad anterior, calcula.

a) La probabilidad de que todas las bolas sean del mismo color.

b) La probabilidad de obtener alguna bola de color rojo.

a) $P(X=3)+P(X=0)=0{,}064+0{,}216=0{,}28$

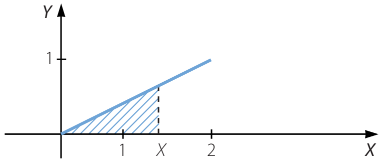
b) $1-P(X=3)=1-0{,}064=0{,}936$

013 Calcula el valor de k para que la siguiente función sea una función de densidad, y halla la función de distribución asociada a ella.

$$f(x)=\begin{cases}kx & \text{si } 0\le x\le 2\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

$1=b\cdot h=2k\rightarrow k=\frac{1}{2}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } -\infty<x<0\\ \frac{x^2}{4} & \text{si } 0\le x\le 2\\ 1 & \text{si } 2<x<+\infty\end{cases}$$



014 Halla la función de densidad que corresponde a esta función de distribución.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } -\infty<x<0\\ x^2 & \text{si } 0\le x\le 1\\ 1 & \text{si } 1<x<+\infty\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

015 Tipifica los siguientes valores de una variable aleatoria con $\mu = 3$ y $\sigma = 2$.

a) $x_1 = 3$ b) $x_2 = 4{,}5$ c) $x_3 = -0{,}5$ d) $x_4 = -1$

a) $\dfrac{3-3}{2} = 0$

b) $\dfrac{4{,}5-3}{2} = 0{,}75$

c) $\dfrac{-0{,}5-3}{2} = -1{,}75$

d) $\dfrac{-1-3}{2} = -2$

016 Compara los datos de estas distribuciones.

$x_1 = 2$ (con $\mu = 1$, $\sigma = 2$)
$x_2 = 1$ (con $\mu = 2$, $\sigma = 1$)
$x_3 = 1{,}5$ (con $\mu = 1{,}5$; $\sigma = 1{,}5$)

$z_1 = \dfrac{2-1}{2} = 0{,}5$ $\quad z_2 = \dfrac{1-2}{1} = -1$ $\quad z_3 = \dfrac{1{,}5-1{,}5}{1{,}5} = 0$

$z_2 < z_3 < z_1$

017 Si la variable aleatoria X sigue una distribución normal $X \equiv N(5, 2)$, calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(X < 2)$ c) $P(X = 4)$ e) $P(X < 7)$
b) $P(X > 3)$ d) $P(X = 6)$ f) $P(X = 8)$

a) $P(X < 2) = P\left(\dfrac{X-5}{2} < \dfrac{2-5}{2}\right) = P(Z < -1{,}5) = 1 - P(Z \le 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

b) $P(X > 3) = P\left(\dfrac{X-5}{2} > \dfrac{3-5}{2}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0{,}8413$

c) $P(X = 4) = 0$

d) $P(X = 6) = 0$

e) $P(X < 7) = P\left(\dfrac{X-5}{2} < \dfrac{7-5}{2}\right) = P(Z < 1) = 0{,}8413$

f) $P(X = 8) = 0$

018 Una variable aleatoria X se distribuye según una normal de media μ y desviación típica σ. Sabemos que los cuartiles de la distribución valen 12 y 36, respectivamente. ¿Cuánto valen la media μ y la desviación típica σ?

$$P(X < 12) = P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} < \dfrac{12-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \dfrac{12-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25$$

$$\to P\left(Z < -\dfrac{12-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \to -\dfrac{12-\mu}{\sigma} = 0{,}68 \to 12-\mu = -0{,}68\sigma$$

$$P(X < 36) = P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} < \dfrac{36-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \dfrac{36-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \to \dfrac{36-\mu}{\sigma} = 0{,}68$$

$$\to 36-\mu = 0{,}68\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} 12-\mu = -0{,}68\sigma \\ 36-\mu = 0{,}68\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 24 \\ \sigma = 17{,}647 \end{array}$$

019 Una fábrica de componentes elabora 2.000 circuitos electrónicos al día. Si la probabilidad de fabricar un circuito defectuoso es del 1 %, ¿cuál es la probabilidad de que en un día el número de circuitos defectuosos sea mayor que 50? ¿Y menor que 25?

$$X \equiv B(2.000;\ 0{,}01) \approx N(20;\ 4{,}45)$$

$$P(X > 50) = P\left(\frac{X-20}{4{,}45} > \frac{50-20}{4{,}45}\right) = P(Z > 6{,}74) = 1 - P(Z \leq 6{,}74) = 1 - 1 = 0$$

$$P(X < 25) = P\left(\frac{X-20}{4{,}45} < \frac{25-20}{4{,}45}\right) = P(Z < 1{,}12) = 0{,}8686$$

020 El 10 % de las personas de una ciudad afirma que no ve nunca televisión. Calcula la probabilidad de que, escogidas 100 personas al azar, haya al menos 14 personas que no vean televisión. ¿Qué probabilidad hay de que sean exactamente 14?

$$X \equiv B(100;\ 0{,}1) \approx N(10{,}3)$$

$$P(X \geq 14) = P\left(\frac{X-10}{3} \geq \frac{14-10}{3}\right) = P(Z \geq 1{,}33) = 1 - P(Z < 1{,}33) =$$
$$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$

$$P(X = 14) = P(13{,}5 < X < 14{,}5) = P\left(\frac{13{,}5-10}{3} < \frac{X-10}{3} < \frac{14{,}5-10}{3}\right) =$$
$$= P(Z < 1{,}5) - P(Z < 1{,}17) = 0{,}9332 - 0{,}879 = 0{,}0542$$

021 ●○○ En una urna hay 5 bolas rojas y 3 bolas azules. Se sacan 3 bolas y se anota el número de bolas azules que se han conseguido. Realiza una tabla con la distribución de probabilidad, y halla la media y la desviación típica.

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
0	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$
1	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{7}$
2	$\frac{15}{56}$	$\frac{55}{56}$
3	$\frac{1}{56}$	1

Media: $\mu = \frac{9}{8} = 1{,}125$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}502} = 0{,}709$

Distribuciones binomial y normal

022

En el experimento aleatorio consistente en elegir al azar una ficha de dominó, se considera la variable $X =$ «mayor número de las dos puntuaciones de la ficha».

Construye la distribución de probabilidad y halla la media, la desviación típica y la varianza.

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
0	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$
1	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{28}$
2	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{14}$
3	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$
4	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$
5	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{4}$
6	$\frac{1}{4}$	1

Media: $\mu = \frac{112}{28} = 4$

Varianza: $\sigma^2 = 3$

Desviación típica: $\sigma = 1{,}732$

023

Se lanzan dos dados y se considera la variable aleatoria que a cada suceso elemental le hace corresponder la diferencia entre el mayor y el menor de los resultados de ambos dados.

a) Clasifica la variable aleatoria.

b) Describe la distribución de probabilidad en forma de tabla.

a) Es una variable discreta.

b)

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
4	$\frac{1}{9}$	$\frac{17}{18}$
5	$\frac{1}{18}$	1

024 Hemos pintado tres caras de un dado con un 1, dos caras con un 2 y una cara con un 3. Si consideramos la variable que asigna a cada suceso elemental su puntuación:

a) Elabora una tabla con la distribución de probabilidad.

b) Halla la media y la desviación típica.

a)

X	$P(X=x_i)$	$P(X\leq x_i)$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	1

b) Media: $\mu = \frac{5}{3} = 1{,}667$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}554} = 0{,}745$

025 Un juego consiste en lanzar dos dados, anotar la suma de los resultados dividida entre 2 y aproximarla, por exceso, al número entero más próximo.

a) Realiza la distribución de probabilidad.

b) Calcula la media, la varianza y la desviación típica.

a)

X	$P(X=x_i)$	$P(X\leq x_i)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
4	$\frac{11}{36}$	$\frac{13}{18}$
5	$\frac{7}{36}$	$\frac{11}{12}$
6	$\frac{1}{12}$	1

b) Media: $\mu = \frac{135}{36} = 3{,}75$

Varianza: $\sigma^2 = 1{,}52$

Desviación típica: $\sigma = 1{,}23$

026 Dada la siguiente tabla, que corresponde a los valores que toma una variable aleatoria X y a sus probabilidades:

X	4	5	6	7
$P(X)$	0,6	0,2	0,15	0,05

a) Comprueba que corresponde a una distribución de probabilidad.

b) Calcula la función de distribución.

c) Halla su media y su desviación típica.

a) $0{,}6 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}05 = 1$

b) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 4 \\ 0{,}6 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0{,}8 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 0{,}95 & \text{si } 6 \leq x < 7 \\ 1 & \text{si } 7 \leq x < +\infty \end{cases}$$

c) Media: $\mu = 4{,}65$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}8275} = 0{,}909$

027 Con la distribución de la actividad anterior, determina las siguientes probabilidades.

a) $P(X > 4)$
b) $P(X < 6)$
c) $P(4 \leq X < 7)$
d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

a) $P(X > 4) = 0{,}4$
b) $P(X < 6) = 0{,}8$
c) $P(4 \leq X < 7) = 0{,}95$
d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(3{,}741 < X < 5{,}559) = 0{,}8$

028 Identifica las variables aleatorias que siguen una distribución binomial.

a) Tenemos tres fichas blancas y cinco fichas azules en una bolsa. Sacamos cuatro fichas y contamos el número de fichas que son blancas.
b) En la situación anterior sacamos una ficha, anotamos su color y la devolvemos a la bolsa. Repetimos el experimento 3 veces y anotamos el número de fichas de color blanco.
c) Lanzamos un dado diez veces y anotamos las veces que sale el número 1.
d) Se lanza un dado y si sale un número par, se vuelve a lanzar el mismo dado, pero si sale un número impar se lanza un dado con forma de tetraedro y caras numeradas del 1 al 4. Se cuenta el número de las veces que sale el número 3.
e) En una ciudad, el 10 % de la población tiene los ojos de color azul. Se eligen, al azar, 20 personas y se anota el número de ellas que tiene los ojos azules.

a) La variable aleatoria no sigue una distribución binomial.
b) La variable es discreta porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3.
$n = 3$ es el número de veces que se realiza el experimento.
Sea A = «Salir una ficha blanca», entonces $P(A) = \frac{3}{8}$.
Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en una extracción no influye en la siguiente.
Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(3, \frac{3}{8}\right)$
c) La variable es discreta porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.
$n = 10$ es el número de veces que se realiza el experimento.
Sea A = «Salir un 1», entonces $P(A) = \frac{1}{6}$.
Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en un lanzamiento no influye en el siguiente.
Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$
d) La variable aleatoria no sigue una distribución binomial.
e) La variable es discreta, porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20.
$n = 20$ es el número de veces que se realiza el experimento.
Sea A = «Tener los ojos azules», entonces $P(A) = 0{,}1$.
Los experimentos son independientes, porque el color de los ojos de una persona no influye en el color de los ojos de la otra persona.
Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B(20; 0{,}1)$

029 Calcula las probabilidades que se indican en las siguientes distribuciones binomiales.

a) En $B(8; 0{,}2)$ $\quad P(X=4), P(X=1), P(X=0)$

b) En $B(12; 0{,}9)$ $\quad P(X=2), P(X<3), P(X\geq 11)$

c) En $B(6; 0{,}8)$ $\quad P(2\leq X\leq 5), P(1\leq X\leq 4)$

a) $P(X=4)=\binom{8}{4}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^4=0{,}045875$ $\quad P(X=1)=\binom{8}{1}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^7=0{,}33554$

$P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^8=0{,}16777$

b) $P(X=2)=\binom{12}{2}\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1^{10}=0{,}000000005346$

$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$

$=0{,}000000000001+0{,}000000000108+0{,}000000005346=0{,}000000005455$

$P(X\geq 11)=P(X=11)+P(X=12)=0{,}37657+0{,}28243=0{,}659$

c) $P(2\leq X\leq 5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$

$=0{,}01536+0{,}08192+0{,}24576+0{,}39322=0{,}73626$

$P(1\leq X\leq 4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$

$=0{,}001536+0{,}001536+0{,}08192+0{,}24576=0{,}344576$

030 Una máquina que fabrica discos compactos consigue fabricar un 90 % de discos sin error. Si escogemos 10 de ellos al azar, calcula las siguientes probabilidades.

a) No hay ninguno defectuoso.
b) Hay más de uno defectuoso.

a) $P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^{10}=0{,}3487$

b) $P(X>1)=1-P(X\leq 1)=1-(P(X=0)+P(X=1))=1-(0{,}3487+0{,}3874)=0{,}2639$

031 Un examen tipo test tiene 30 preguntas a las que se ofrecen cuatro respuestas posibles.

a) Si se responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de acertar más de dos preguntas?

b) Si para aprobar hay que tener más de 15 respuestas correctas, ¿cuál es la probabilidad de obtener un aprobado?

$X\equiv B(30; 0{,}25)$

$$\left.\begin{array}{l} np=7{,}5>5\\ n(1-p)=22{,}5>5\end{array}\right\}\rightarrow X\equiv B(30; 0{,}25)\approx N(7{,}5; 2{,}37)$$

a) $P(X>2)=P\left(\dfrac{X-7{,}5}{2{,}37}>\dfrac{2-7{,}5}{2{,}37}\right)=P(Z>-2{,}32)=P(Z<2{,}32)=0{,}9898$

b) $P(X>15)=P\left(\dfrac{X-7{,}5}{2{,}37}>\dfrac{15-7{,}5}{2{,}37}\right)=P(Z>3{,}16)=1-P(Z\leq 3{,}16)=$

$=1-0{,}9992=0{,}0008$

032 Se lanza el dado 25 veces. Cada vez que se obtiene un número mayor que 2 gana Eva. En caso contrario, gana Daniel.

a) Describe la función de probabilidad y la función de distribución.
b) ¿Cuáles son la media y la desviación típica de esta distribución?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que Eva gane exactamente 3 veces?
d) ¿Cual es la probabilidad de que Daniel gane más de 22 veces?

a) La función de probabilidad es: $f(x) = \begin{cases} \binom{25}{x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{25-x} & \text{si } x = 0, 1, 2, \ldots, 25 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

La función de distribución es: $F(x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{25}{i} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{25-i}$

b) $\mu = 25 \cdot \frac{2}{3} = 16{,}67$

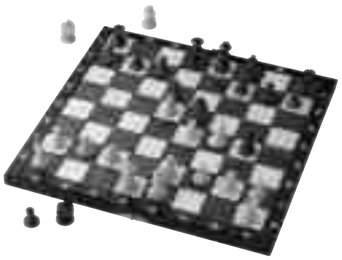
$\sigma = \sqrt{25 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = 2{,}36$

c) $\left.\begin{array}{l} np = 16{,}67 > 5 \\ n(1-p) = 8{,}33 > 5 \end{array}\right\} \to X \equiv B(25;\, 0{,}66) \approx N(16{,}67;\, 2{,}36)$

$P(X = 3) = P(2{,}5 < X < 3{,}5) = P\left(\frac{2{,}5 - 16{,}67}{2{,}36} < \frac{X - 16{,}67}{2{,}36} < \frac{3{,}5 - 16{,}67}{2{,}36}\right) =$
$= P(-6 < Z < -5{,}5) = P(5{,}5 < Z < 6) = 0$

d) $P(X < 3) = P\left(\frac{X - 16{,}67}{2{,}36} < \frac{3 - 16{,}67}{2{,}36}\right) = P(Z < -5{,}79) = 1 - P(Z \le 5{,}79) = 0$

033 De cada 10 veces que mi hermano juega conmigo al ajedrez, me gana 7 veces.



a) ¿Cuál es la probabilidad de que me gane 1 vez?
b) ¿Y de hacer tablas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que me gane entre 1 y 3 veces, ambos números incluidos?
d) Si apostamos que, en 10 partidas, yo le ganaré al menos 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de ganar la apuesta?

$X \equiv B(10;\, 0{,}7)$

a) $P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^9 = 0{,}0001378$

b) $P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^5 = 0{,}1029$

c) $P(1 \le X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
$= \binom{10}{1} \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^9 + \binom{10}{2} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^8 + \binom{10}{3} \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^7 =$
$= 0{,}0001378 + 0{,}001447 + 0{,}009002 = 0{,}0105868$

d) $P(X < 6) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$
$= 0{,}000005904 + 0{,}0001378 + 0{,}001447 + 0{,}009002 + 0{,}03676 + 0{,}1029 =$
$= 0{,}15025$

034 En un laboratorio de análisis clínicos saben que el 98 % de las pruebas de diabetes que realizan resulta negativo. Si han recibido 10 muestras para analizar:

a) Determina la probabilidad de que haya 2 personas a las que la prueba les dé positivo.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba resulte positiva a más de 1 persona?

$X \equiv B(10; 0{,}02)$

a) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^8 = 0{,}01531$

b) $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$
$= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^9 = 1 - 0{,}8171 - 0{,}1667 = 0{,}0162$

035 El 20 % de la población de una ciudad es inmigrante de procedencia africana. Se eligen cinco personas al azar. Determina la probabilidad de que:

a) Haya un inmigrante africano.

b) Sean dos o más inmigrantes africanos.

c) Las cinco sean inmigrantes africanos.

d) Haya, al menos, un africano.

e) Sean cuatro inmigrantes africanos.

$X \equiv B(5; 0{,}2)$

a) $P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$
$= 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 - \binom{5}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4 = 1 - 0{,}3277 - 0{,}4096 = 0{,}2627$

c) $P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^0 = 0{,}00032$

d) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 1 - 0{,}3277 = 0{,}6723$

e) $P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^1 = 0{,}0064$

036 Juan suele dar en el blanco con una de cada tres flechas que lanza a la diana.

a) ¿Es cierto que si lanza 3 flechas, al menos una de ellas dará en el blanco?

b) ¿Qué probabilidad hay de que eso suceda?

c) Y si lanza 6 flechas, ¿puede estar seguro de que alguna de sus flechas va a dar en el blanco?

d) ¿Cuántas flechas debería lanzar para asegurar, con una probabilidad de más del 95%, que va a conseguirlo?

a) No, la probabilidad no puede asegurar el resultado del lanzamiento.

b) $X \equiv B\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - 0{,}2963 = 0{,}7037$$

c) No, la probabilidad no varía y no puede asegurar el resultado.

d) $X \equiv B\left(n, \dfrac{1}{3}\right)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0{,}95$$

$$\rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0{,}05 \rightarrow n = \frac{\log 0{,}05}{\log \dfrac{2}{3}} = 7{,}21$$

A partir de 8 flechas, la probabilidad de que al menos una flecha dé en el blanco es más del 95%.

037 En una distribución $N(0, 1)$, calcula las probabilidades.

a) $P(Z < 0{,}73)$
b) $P(Z < 2{,}05)$
c) $P(Z \leq 1{,}77)$
d) $P(Z < 0{,}274)$
e) $P(Z > -0{,}38)$
f) $P(Z > -1{,}297)$
g) $P(Z = -2{,}75)$
h) $P(Z \geq -1{,}04)$

a) $P(Z < 0{,}73) = 0{,}7673$
b) $P(Z < 2{,}05) = 0{,}9798$
c) $P(Z \leq 1{,}77) = 0{,}9616$
d) $P(Z < 0{,}274) = 0{,}6079$
e) $P(Z > -0{,}38) = P(Z < 0{,}38) = 0{,}648$
f) $P(Z > -1{,}297) = P(Z < 1{,}297) = 0{,}9026$
g) $P(Z = -2{,}75) = 0$
h) $P(Z \geq -1{,}04) = P(Z \leq 1{,}04) = 0{,}8508$

038 En una distribución $N(0, 1)$, halla las siguientes probabilidades.

a) $P(Z > 3{,}58)$
b) $P(Z \geq 1{,}3487)$
c) $P(Z = 2{,}107)$
d) $P(Z \geq 0{,}53)$
e) $P(Z < -0{,}33)$
f) $P(Z < -1{,}334)$
g) $P(Z \leq -2{,}19)$
h) $P(Z < -3{,}487)$

a) $P(Z > 3{,}58) = 1 - P(Z < 3{,}58) = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001$
b) $P(Z \geq 1{,}3487) = 1 - P(Z \leq 1{,}3487) = 1 - 0{,}9113 = 0{,}0887$
c) $P(Z = 2{,}107) = 0$
d) $P(Z \geq 0{,}53) = 1 - P(Z \leq 0{,}53) = 1 - 0{,}7019 = 0{,}2981$
e) $P(Z < -0{,}33) = 1 - P(Z \leq 0{,}33) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$
f) $P(Z < -1{,}334) = 1 - P(Z \leq 1{,}334) = 1 - 0{,}9088 = 0{,}0912$
g) $P(Z \leq -2{,}19) = 1 - P(Z \leq 2{,}19) = 1 - 0{,}9857 = 0{,}0143$
h) $P(Z < -3{,}487) = 1 - P(Z \leq 3{,}487) = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001$

039 En una distribución $N(0, 1)$, obtén las probabilidades.

a) $P(0,26 < Z < 0,39)$
b) $P(1,16 < Z < 2,03)$
c) $P(-0,64 < Z < 1,36)$
d) $P(-0,56 < Z < 3,92)$
e) $P(-2,6 < Z < -0,4329)$
f) $P(-1,49 < Z < -1,07)$

a) $P(0,26 < Z < 0,39) = P(Z < 0,39) - P(Z < 0,26) = 0,6517 - 0,6026 = 0,0491$

b) $P(1,16 < Z < 2,03) = P(Z < 2,03) - P(Z < 1,16) = 0,9788 - 0,877 = 0,1018$

c) $P(-0,64 < Z < 1,36) = P(Z < 1,36) - (1 - P(Z < 0,64)) = 0,9131 - 1 + 0,7389 = 0,652$

d) $P(-0,56 < Z < 3,92) = P(Z < 3,92) - (1 - P(Z < 0,56)) = 0,9999 - 1 + 0,7123 = 0,7122$

e) $P(-2,6 < Z < -0,4329) = P(Z < 2,6) - P(Z < 0,4329) = 0,9953 - 0,6674 = 0,3279$

f) $P(-1,49 < Z < -1,07) = P(Z < 1,49) - P(Z < 1,07) = 0,9319 - 0,8577 = 0,0742$

040 Calcula el valor de k para que se verifiquen las igualdades en la distribución $N(0, 1)$.

a) $P(Z < k) = 0,9608$
b) $P(Z < k) = 0,3192$
c) $P(Z > k) = 0,9573$
d) $P(Z \geq k) = 0,0113$

a) $k = 1,76$

b) $P(Z < k) = 0,3192 \rightarrow P(Z < -k) = 0,6808 \rightarrow -k = 0,47 \rightarrow k = -0,47$

c) $P(Z > k) = 0,9573 \rightarrow P(Z < -k) = 0,9573 \rightarrow -k = 1,72 \rightarrow k = -1,72$

d) $P(Z \geq k) = 0,0113 \rightarrow P(Z < k) = 0,9887 \rightarrow k = 2,28$

041 Determina las siguientes probabilidades en una distribución $N(12, 2)$.

a) $P(X < 12,36)$
b) $P(X < 16,4)$
c) $P(X \leq 17,01)$
d) $P(X < 12,0273)$
e) $P(X > 11,82)$
f) $P(X > 9,84)$
g) $P(X = 12,55)$
h) $P(X \geq 7,89)$

a) $P(X < 12,36) = P\left(\frac{X-12}{2} < \frac{12,36-12}{2}\right) = P(Z < 0,18) = 0,5714$

b) $P(X < 16,4) = P\left(\frac{X-12}{2} < \frac{16,4-12}{2}\right) = P(Z < 2,2) = 0,9861$

c) $P(X \leq 17,01) = P\left(\frac{X-12}{2} \leq \frac{17,01-12}{2}\right) = P(Z < 2,51) = 0,994$

d) $P(X < 12,0273) = P\left(\frac{X-12}{2} < \frac{12,0273-12}{2}\right) = P(Z < 0,014) = 0,5056$

e) $P(X > 11,82) = P\left(\frac{X-12}{2} < \frac{11,82-12}{2}\right) = P(Z < -0,09) = 1 - P(Z \leq 0,09) =$
$= 1 - 0,5359 = 0,4641$

f) $P(X > 9,84) = P\left(\frac{X-12}{2} < \frac{9,84-12}{2}\right) = P(Z < -1,08) = 1 - P(Z \leq 1,08) =$
$= 1 - 0,8599 = 0,1401$

g) $P(X = 12,55) = 0$

h) $P(X \geq 7,89) = P\left(\frac{X-12}{2} < \frac{7,89-12}{2}\right) = P(Z < -2,06) = 1 - P(Z \leq 2,06) =$
$= 1 - 0,9803 = 0,0197$

042 En una distribución $N(56, 4)$, calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(X > 68{,}4)$ c) $P(X = 56)$ e) $P(X < 53{,}3)$ g) $P(X \leq 46{,}92)$
b) $P(X \geq 62{,}45)$ d) $P(X \geq 52{,}45)$ f) $P(X \geq 57{,}32)$ h) $P(X < 46{,}877)$

a) $P(X > 68{,}4) = P\left(\frac{X-56}{4} > \frac{68{,}4-56}{4}\right) = P(Z > 3{,}1) = 1 - P(Z \leq 3{,}1) = = 1 - 0{,}999 = 0{,}001$

b) $P(X \geq 62{,}45) = P\left(\frac{X-56}{4} \geq \frac{62{,}45-56}{4}\right) = P(Z \geq 1{,}61) = 1 - P(Z < 1{,}61) = = 1 - 0{,}9463 = 0{,}0537$

c) $P(X = 56) = 0$

d) $P(X \geq 52{,}45) = P\left(\frac{X-56}{4} \geq \frac{52{,}45-56}{4}\right) = P(Z \geq -0{,}89) = P(Z \leq 0{,}89) = 0{,}8133$

e) $P(X < 53{,}3) = P\left(\frac{X-56}{4} < \frac{53{,}3-56}{4}\right) = P(Z < -0{,}68) = 1 - P(Z \leq 0{,}68) = = 1 - 0{,}7517 = 0{,}2483$

f) $P(X \geq 57{,}32) = P\left(\frac{X-56}{4} \geq \frac{57{,}32-56}{4}\right) = P(Z \geq 0{,}33) = 1 - P(Z < 0{,}33) = = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$

g) $P(X \leq 46{,}92) = P\left(\frac{X-56}{4} \leq \frac{46{,}92-56}{4}\right) = P(Z \leq -2{,}27) = 1 - P(Z < 2{,}27) = = 1 - 0{,}9884 = 0{,}0116$

h) $P(X < 46{,}877) = P\left(\frac{X-56}{4} < \frac{46{,}877-56}{4}\right) = P(Z < -2{,}28) = 1 - P(Z \leq 2{,}28) = = 1 - 0{,}9887 = 0{,}0113$

043 En una distribución $N(90, 12)$, obtén estas probabilidades.

a) $P(106 < X < 120)$ d) $P(76{,}67 < X < 103{,}96)$
b) $P(109 < X < 117{,}3)$ e) $P(58{,}89 < X < 82)$
c) $P(84 < X < 112{,}6)$ f) $P(69 < X < 87)$

a) $P(106 < X < 120) = P\left(\frac{106-90}{12} < \frac{X-90}{12} < \frac{120-90}{12}\right) = P(1{,}33 < Z < 2{,}5) = = P(Z < 2{,}5) - P(Z < 1{,}33) = 0{,}9938 - 0{,}9082 = 0{,}0856$

b) $P(109 < X < 117{,}3) = P\left(\frac{109-90}{12} < \frac{X-90}{12} < \frac{117{,}3-90}{12}\right) = P(1{,}58 < Z < 2{,}28) = = P(Z < 2{,}28) - P(Z < 1{,}58) = 0{,}9887 - 0{,}9429 = 0{,}0458$

c) $P(84 < X < 112{,}6) = P\left(\frac{84-90}{12} < \frac{X-90}{12} < \frac{112{,}6-90}{12}\right) = P(-0{,}5 < Z < 1{,}88) = = P(Z < 1{,}88) - (1 - P(Z < 0{,}5)) = 0{,}9699 - 1 + 0{,}6915 = 0{,}6614$

d) $P(76{,}67 < X < 103{,}96) = P\left(\frac{76{,}67-90}{12} < \frac{X-90}{12} < \frac{103{,}96-90}{12}\right) = = P(-1{,}11 < Z < 1{,}16) = P(Z < 1{,}16) - (1 - P(Z < 1{,}11)) = = 0{,}877 - 1 + 0{,}8665 = 0{,}7435$

e) $P(58{,}89 < X < 82) = P\left(\frac{58{,}89-90}{12} < \frac{X-90}{12} < \frac{82-90}{12}\right) =$
$= P(-2{,}59 < Z < -0{,}67) = P(Z < 2{,}59) - P(Z < 0{,}67) =$
$= 0{,}9952 - 0{,}7486 = 0{,}2466$

f) $P(69 < X < 87) = P\left(\frac{69-90}{12} < \frac{X-90}{12} < \frac{87-90}{12}\right) = P(-1{,}75 < Z < -0{,}25) =$
$= P(Z < 1{,}75) - P(Z < 0{,}25) = 0{,}9599 - 0{,}5987 = 0{,}3612$

044 Halla $a, b, c, \dots$, para que en una distribución normal $N(108, 16)$ se cumpla que:

a) $P(X < a) = 0{,}8849$
b) $P(X < b) = 0{,}9972$
c) $P(X < c) = 0{,}3632$
d) $P(X \geq d) = 0{,}0495$
e) $P(X \geq e) = 0{,}5987$

a) $P(X < a) = 0{,}8849 \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} < \frac{a-108}{16}\right) = 0{,}8849 \rightarrow \frac{a-108}{16} = 1{,}2$
$\rightarrow a = 127{,}2$

b) $P(X < b) = 0{,}9972 \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} < \frac{b-108}{16}\right) = 0{,}9972 \rightarrow \frac{b-108}{16} = 2{,}77$
$\rightarrow b = 152{,}32$

c) $P(X < c) = 0{,}3632 \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} < \frac{c-108}{16}\right) = 0{,}3632$
$\rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \leq -\frac{c-108}{16}\right) = 0{,}6368 \rightarrow -\frac{c-108}{16} = 0{,}35$
$\rightarrow c = 102{,}4$

d) $P(X \geq d) = 0{,}0495 \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \geq \frac{d-108}{16}\right) = 0{,}0495$
$\rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} < \frac{d-108}{16}\right) = 0{,}9505 \rightarrow \frac{d-108}{16} = 1{,}65$
$\rightarrow d = 134{,}4$

e) $P(X \geq e) = 0{,}5987 \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \geq \frac{e-108}{16}\right) = 0{,}5987$
$\rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \leq -\frac{e-108}{16}\right) = 0{,}5987 \rightarrow -\frac{e-108}{16} = 0{,}25$
$\rightarrow e = 104$

045 El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal $N(192,12)$. Calcula la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:

a) Superior a 200 unidades.
b) Entre 180 y 220 unidades.

a) $P(X > 200) = P\left(\frac{X-192}{12} > \frac{200-192}{12}\right) = P(Z > 0{,}67) = 1 - P(Z \leq 0{,}67) =$
$= 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$

b) $P(180 < X < 220) = P\left(\frac{180-192}{12} < \frac{X-192}{12} < \frac{220-192}{12}\right) = P(-1 < Z < 2{,}33) =$
$= P(Z < 2{,}33) - (1 - P(Z < 1)) = 0{,}9901 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8314$

046 Se ha comprobado que el tiempo medio que resiste un adulto sin respirar es de 40 segundos, con una desviación típica de 6,2 segundos, y que los datos anteriores siguen una distribución normal.

a) Halla el porcentaje de personas que aguantan más de 53 segundos y menos de 30 segundos.

b) ¿Qué porcentaje resiste entre 30 y 50 segundos?

a) $P(X > 53) \cdot P(X < 30) = P\left(\frac{X-40}{6,2} > \frac{53-40}{6,2}\right) \cdot P\left(\frac{X-40}{6,2} < \frac{30-40}{6,2}\right) =$

$= P(Z > 2{,}09) \cdot P(Z < -1{,}61) = (1 - P(Z \leq 2{,}09)) \cdot (1 - P(Z \leq 1{,}61)) =$

$= (1 - 0{,}9817) \cdot (1 - 0{,}9463) = 0{,}00098$

El porcentaje de personas es del 0,09 %.

b) $P(30 < X < 50) = P\left(\frac{30-40}{6,2} < \frac{X-40}{6,2} < \frac{50-40}{6,2}\right) = P(-1{,}61 < Z < 1{,}61) =$

$= P(Z < 1{,}61) - (1 - P(Z < 1{,}61)) = 2 \cdot 0{,}9463 - 1 = 0{,}8926$

El 89,26 % resiste entre 30 y 50 segundos.

047 La edad de un grupo de personas sigue una distribución $N(35, 10)$. Calcula la probabilidad de que una persona de ese grupo, elegida al azar, tenga:

a) Más de 40 años.

b) Entre 23 y 47 años.

c) Di entre qué edades estará comprendido el 50 % central de la distribución.

a) $P(X > 40) = P\left(\frac{X-35}{10} > \frac{40-35}{10}\right) = P(Z > 0{,}5) = 1 - P(Z \leq 0{,}5) =$

$= 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

b) $P(23 < X < 47) = P\left(\frac{23-35}{10} < \frac{X-35}{10} < \frac{47-35}{10}\right) = P(-1{,}2 < Z < 1{,}2) =$

$= P(Z < 1{,}2) - (1 - P(Z < 1{,}2)) = 2 \cdot 0{,}8849 - 1 = 0{,}7698$

c) $P(35 - a < X < 35 + a) = 0{,}5 \rightarrow P\left(\frac{35-a-35}{10} < \frac{X-35}{10} < \frac{35+a-35}{10}\right) =$

$= P\left(-\frac{a}{10} < Z < \frac{a}{10}\right) = P\left(Z < \frac{a}{10}\right) - \left(1 - P\left(Z < \frac{a}{10}\right)\right) =$

$= 2P\left(Z < \frac{a}{10}\right) - 1 = 0{,}5 \rightarrow P\left(Z < \frac{a}{10}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{a}{10} = 0{,}68 \rightarrow a = 6{,}8$

El 50 % central de la distribución estará comprendido entre 28 y 42 años.

048 El peso de las ovejas adultas se distribuye normalmente con una media de 53 kg y una desviación típica de 2,4 kg.

a) ¿Qué porcentaje de las ovejas pesará entre 50 y 57 kg?
b) Si pretendemos separar una cuarta parte de las ovejas, siendo las más pesadas del rebaño, ¿a partir de qué peso se hará la separación?

a) $P(50 < X < 57) = P\left(\frac{50-53}{2,4} < \frac{X-53}{2,4} < \frac{57-53}{2,4}\right) = P(-1,25 < Z < 1,67) =$
$= P(Z < 1,67) - (1 - P(Z < 1,25)) = 0,9525 - 1 + 0,8944 = 0,8469$

b) $P(X > a) = 0,25 \rightarrow P\left(\frac{X-53}{2,4} > \frac{a-53}{2,4}\right) = P\left(Z > \frac{a-53}{2,4}\right) =$
$= 1 - P\left(Z \leq \frac{a-53}{2,4}\right) = 0,25 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-53}{2,4}\right) = 0,75$
$\rightarrow \frac{a-53}{2,4} = 0,68 \rightarrow a = 54,63$

La separación debe hacerse a partir de 54,63 kg.

049 El tiempo medio de espera de un viajero en una estación ferroviaria, medido en minutos, sigue una distribución normal $N(7,5; 2)$. Cada mañana 4.000 viajeros acceden a esa estación. Determina el número de viajeros que esperó:

a) Más de 9 minutos.
b) Menos de 6 minutos.
c) Entre 5 y 10 minutos.
d) Completa la frase: «Los 1.000 viajeros que menos tiempo tardaron en subir al tren tuvieron que esperar menos de … minutos».

a) $P(X > 9) = P\left(\frac{X-7,5}{2} > \frac{9-7,5}{2}\right) = P(Z > 0,75) = 1 - P(Z \leq 0,75) =$
$= 1 - 0,7734 = 0,2266$

$0,2266 \cdot 4.000 = 906,4 \rightarrow$ 906 viajeros esperaron más de 9 minutos.

b) $P(X < 6) = P\left(\frac{X-7,5}{2} < \frac{6-7,5}{2}\right) = P(Z < -0,75) = 1 - P(Z \leq 0,75) =$
$= 1 - 0,7734 = 0,2266$

$0,2266 \cdot 4.000 = 906,4 \rightarrow$ 906 viajeros esperaron menos de 6 minutos.

c) $P(5 < X < 10) = P\left(\frac{5-7,5}{2} < \frac{X-7,5}{2} < \frac{10-7,5}{2}\right) = P(-1,25 < Z < 1,25) =$
$= P(Z < 1,25) - (1 - P(Z < 1,25)) = 2 \cdot 0,8944 - 1 = 0,7888$

$0,7888 \cdot 4.000 = 3.155,2 \rightarrow$ 3.155 viajeros esperaron entre 5 y 10 minutos.

d) $\frac{1.000}{4.000} = 0,25 \to P(X < a) = 0,25 \to P\left(\frac{X - 7,5}{2} < \frac{a - 7,5}{2}\right) = 0,25$

$\to P\left(Z < \frac{a - 7,5}{2}\right) = 0,25 \to P\left(Z \le \frac{a - 7,5}{2}\right) = 0,75$

$\to \frac{a - 7,5}{2} = 0,68 \to a = 8,86$

Los 1.000 viajeros que menos tiempo tardaron en subir al tren tuvieron que esperar menos de 8 minutos.

050 Se sabe que el 98,61% de los tornillos fabricados por una empresa tiene un diámetro menor que 3,398 mm. Si el diámetro de los tornillos se distribuye según una normal de media $\mu = 3,2$ mm, determina la desviación típica.

$P(X < 3,398) = 0,9861 \to P\left(\frac{X - 3,2}{\sigma} < \frac{3,398 - 3,2}{\sigma}\right) = 0,9861$

$\to P\left(Z < \frac{0,198}{\sigma}\right) = 0,9861 \to \frac{0,198}{\sigma} = 2,2 \to \sigma = 0,09$

051 Dos amigos están jugando al parchís. Uno de ellos asegura que ha tirado el dado 30 veces y no le ha salido ningún 5. El otro amigo afirma que eso es imposible. ¿Es realmente imposible? ¿Cuál es la probabilidad de que eso suceda?

No es imposible, porque la probabilidad no puede asegurar el resultado de los lanzamientos.

$X \equiv B\left(30, \frac{1}{6}\right) \qquad P(X = 0) = \binom{30}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{30} = 0,0042$

052 El 60 % de una población de 20.000 habitantes tiene los ojos oscuros. Si elegimos, al azar, 50 personas de esa población, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 30 personas con los ojos oscuros?

$X \equiv B(50; 0,6)$

$\left.\begin{array}{l} np = 30 > 5 \\ n(1 - p) = 20 > 5 \end{array}\right\} \to X \equiv B(50; 0,6) \approx N(30; 3,46)$

$P(X < 30) = P\left(\frac{X - 30}{3,46} < \frac{30 - 30}{3,46}\right) = P(Z < 0) = 0,5$

053 El 7 % de los pantalones de una marca tiene algún defecto. Se empaquetan en cajas de 80 unidades para distribuirlos. ¿Cuál es la probabilidad de que en una caja haya más de 10 pantalones defectuosos?

$X \equiv B(80; 0,07)$

$\left.\begin{array}{l} np = 5,6 > 5 \\ n(1 - p) = 78,4 > 5 \end{array}\right\} \to X \equiv B(80; 0,07) \approx N(5,6; 2,28)$

$P(X > 10) = P\left(\frac{X - 5,6}{2,28} > \frac{10 - 5,6}{2,28}\right) = P(Z > 1,93) = 1 - P(Z \le 1,93) =$

$= 1 - 0,9732 = 0,0268$

054 Se está experimentando una nueva vacuna para la malaria que resulta efectiva en el 60 % de los casos. Si se eligen al azar 45 personas, halla las siguientes probabilidades.

a) La probabilidad de que en ese grupo la vacuna sea efectiva en 27 personas.
b) La probabilidad de que sea efectiva en un número de personas comprendido entre 25 y 27, ambos inclusive.
c) La probabilidad de que resulte efectiva en menos de 20 personas.

$X \equiv B(45;\ 0{,}6)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 27 > 5 \\ n(1-p) = 10{,}8 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(45;\ 0{,}6) \approx N(27;\ 3{,}28)$$

a) $P(X = 27) = P(26{,}5 < X < 27{,}5) = P\left(\dfrac{26{,}5-27}{3{,}28} < \dfrac{X-27}{3{,}28} < \dfrac{27{,}5-27}{3{,}28}\right) =$
$= P(-0{,}15 < Z < 0{,}15) = P(Z < 0{,}15) - (1 - P(Z < 0{,}15)) =$
$= 2 \cdot 0{,}5596 - 1 = 0{,}1192$

b) $P(25 \le X \le 27) = P\left(\dfrac{25-27}{3{,}28} \le \dfrac{X-27}{3{,}28} \le \dfrac{27-27}{3{,}28}\right) = P(-0{,}61 \le Z \le 0) =$
$= P(Z \le 0{,}61) - P(Z \le 0) = 0{,}7291 - 0{,}5 = 0{,}2291$

c) $P(X < 20) = P\left(\dfrac{X-27}{3{,}28} < \dfrac{20-27}{3{,}28}\right) = P(Z < -2{,}13) = 1 - P(Z \le 2{,}13) =$
$= 1 - 0{,}9834 = 0{,}0166$

055 Se estima que 1 de cada 8 españoles padece hipertensión. Si elegimos a 60 personas al azar:

a) Determina la probabilidad de que en ese grupo haya exactamente 7 personas hipertensas.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de diez personas hipertensas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo tengan hipertensión 11 personas o menos?

$X \equiv B(60;\ 0{,}125)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 7{,}5 > 5 \\ n(1-p) = 6{,}56 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(60;\ 0{,}125) \approx N(7{,}5;\ 2{,}56)$$

a) $P(X = 7) = P(6{,}5 < X < 7{,}5) = P\left(\dfrac{6{,}5-7{,}5}{2{,}56} < \dfrac{X-7{,}5}{2{,}56} < \dfrac{7{,}5-7{,}5}{2{,}56}\right) =$
$= P(-0{,}39 < Z < 0) = P(Z < 0{,}39) - P(Z < 0) = 0{,}6517 - 0{,}5 = 0{,}1517$

b) $P(X > 10) = P\left(\dfrac{X-7{,}5}{2{,}56} > \dfrac{10-7{,}5}{2{,}56}\right) = P(Z > 0{,}97) = 1 - P(Z \le 0{,}97) =$
$= 1 - 0{,}834 = 0{,}166$

c) $P(X \le 11) = P\left(\dfrac{X-7{,}5}{2{,}56} \le \dfrac{11-7{,}5}{2{,}56}\right) = P(Z \le 1{,}36) = 0{,}9131$

056 Las compañías de seguros han calculado que 1 de cada 5 vehículos tiene un accidente al año. Si se toman al azar 40 vehículos, determina.

a) La probabilidad de que ese año 10 de ellos tengan un accidente.
b) La probabilidad que sean entre 10 y 12 vehículos, ambos números incluidos.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que ese año se accidenten más de 15 vehículos?

$X \equiv B(40;\ 0{,}2)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 8 > 5 \\ n(1-p) = 6{,}4 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(40;\ 0{,}2) \approx N(8;\ 2{,}53)$$

a) $$P(X = 10) = P(9{,}5 < X < 10{,}5) = P\left(\frac{9{,}5-8}{2{,}53} < \frac{X-8}{2{,}53} < \frac{10{,}5-8}{2{,}53}\right) =$$
$$= P(0{,}59 < Z < 0{,}98) = P(Z < 0{,}98) - P(Z < 0{,}59) =$$
$$= 0{,}8365 - 0{,}7224 = 0{,}1141$$

b) $$P(10 \le X \le 12) = P\left(\frac{10-8}{2{,}53} \le \frac{X-8}{2{,}53} \le \frac{12-8}{2{,}53}\right) = P(0{,}79 \le Z \le 1{,}58) =$$
$$= P(Z \le 1{,}58) - P(Z \le 0{,}79) = 0{,}9429 - 0{,}7852 = 0{,}1577$$

c) $$P(X > 15) = P\left(\frac{X-8}{2{,}53} > \frac{15-8}{2{,}53}\right) = P(Z > 2{,}76) = 1 - P(Z \le 2{,}76) =$$
$$= 1 - 0{,}9971 = 0{,}0029$$

057 En un concurso dan a elegir una entre tres pruebas. Si las probabilidades de encestar lanzando un tiro son $\frac{1}{5}$ y las de acertar al blanco son $\frac{1}{3}$, elige la prueba en la que tengas más probabilidad de ganar.

- Lanzar 5 tiros a una canasta de baloncesto y encestar 2 por lo menos.
- Tirar 6 veces al blanco y acertar 3 como mínimo.
- Tirar 2 veces a canasta y hacer 1 tiro al blanco. Para superar la prueba se debe conseguir 1 canasta por lo menos y dar en el blanco.

En la primera prueba:

$$X \equiv B\left(5;\ \frac{1}{5}\right)$$

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$
$$= 1 - \binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^5 - \binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4 = 1 - 0{,}3277 - 0{,}4096 = 0{,}2627$$

En la segunda prueba:

$$Y \equiv B\left(6;\ \frac{1}{3}\right)$$

$$P(Y \ge 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)) =$$
$$= 1 - \binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6 - \binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5 - \binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$$
$$= 1 - 0{,}0878 - 0{,}2634 - 0{,}3292 = 0{,}3196$$

En la tercera prueba:

$Z \equiv B\left(2; \frac{1}{5}\right)$

$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \binom{2}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

La probabilidad de ganar es: $0{,}36 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}12$

Por tanto, hay más probabilidad de ganar la segunda prueba.

058 **Solo el 10 % de los boletos de una tómbola tienen premio. ¿Qué es más fácil, tener dos premios comprando 10 boletos o conseguir un premio comprando 3 boletos?**

Si se compran 10 boletos: $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8 = 0{,}1937$

Si se compran 3 boletos: $P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$

Así, es más probable conseguir un premio comprando 3 boletos.

059 **La talla media del pie de los bomberos que ingresaron en el cuerpo el año pasado era 42, con una desviación típica de 1,4. Este año ingresarán 40.000 personas en el cuerpo de bomberos.**

a) Determina el número aproximado de los bomberos que tendrán una talla media del pie de 44 o 45.

b) Calcula el número de botas del número 38 que debería encargar el cuerpo de bomberos.

(Consideramos que un pie tiene talla 40 cuando le correspondería un tallaje comprendido en [39,5; 40,5). Por ejemplo, si a una persona le corresponde una talla de 36,7; diremos que su tallaje es 37. Y si es 38,4; diremos que su tallaje es 38.)

$X \equiv N(42; 1{,}4)$

a) $P(43{,}5 \leq X < 45{,}5) = P\left(\frac{43{,}5 - 42}{1{,}4} \leq \frac{X - 42}{1{,}4} < \frac{45{,}5 - 42}{1{,}4}\right) =$
$= P(1{,}07 \leq Z < 2{,}5) = P(Z < 2{,}5) - P(Z \leq 1{,}07) =$
$= 0{,}9938 - 0{,}8577 = 0{,}1361$

$0{,}1361 \cdot 40.000 = 5.444$ bomberos

b) $P(37{,}5 \leq X < 38{,}5) = P\left(\frac{37{,}5 - 42}{1{,}4} \leq \frac{X - 42}{1{,}4} < \frac{38{,}5 - 42}{1{,}4}\right) =$
$= P(-3{,}21 \leq Z < -2{,}5) = P(Z \leq 3{,}21) - P(Z < 2{,}5) =$
$= 0{,}9993 - 0{,}9938 = 0{,}0055$

Por tanto, encargarán: $0{,}0055 \cdot 40.000 = 220$ pares de botas.

060 La distribución de edades de los miembros de una asociación sigue una ley normal $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 94,52 % tiene menos de 32 años, y un 21,19 % tiene menos de 20 años, calcula su media y su desviación típica.

$$P(X < 32) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{32-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{32-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9452 \rightarrow \frac{32-\mu}{\sigma} = 1{,}6$$
$$\rightarrow 32 - \mu = 1{,}6\sigma$$

$$P(X < 20) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}2119$$
$$\rightarrow P\left(Z < -\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}7881 \rightarrow -\frac{20-\mu}{\sigma} = 0{,}8 \rightarrow 20 - \mu = -0{,}8\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} 32 - \mu = 1{,}6\sigma \\ 20 - \mu = -0{,}8\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 24 \\ \sigma = 5 \end{array}$$

061 Supongamos que la probabilidad de que nazca una niña es la misma de que nazca un niño.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una familia con tres hijos tenga 2 hijos y 1 hija?

b) Si tomamos 100 familias con 3 hijos, ¿cuál es la probabilidad de que haya 35 familias con 2 hijos y 1 hija?

c) ¿Y de que se encuentre entre 35 y 39?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en esas 100 familias haya 12 familias que solo tengan hijas?

a) $P(\text{2 hijos y 1 hija}) = 3 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}375$

b) $X \equiv B(100;\ 0{,}375)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 37{,}5 > 5 \\ n(1-p) = 62{,}5 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100;\ 0{,}375) \approx N(37{,}5;\ 4{,}84)$$

$$P(X = 35) = P(34{,}5 < X < 35{,}5) = P\left(\frac{34{,}5-37{,}5}{4{,}84} < \frac{X-37{,}5}{4{,}84} < \frac{35{,}5-37{,}5}{4{,}84}\right) =$$
$$= P(-0{,}62 < Z < -0{,}41) = P(Z < 0{,}62) - P(Z < 0{,}41) =$$
$$= 0{,}7324 - 0{,}6591 = 0{,}0733$$

c) $$P(35 < X < 39) = P\left(\frac{35-37{,}5}{4{,}84} < \frac{X-37{,}5}{4{,}84} < \frac{39-37{,}5}{4{,}84}\right) =$$
$$= P(-0{,}51 < Z < 0{,}31) = P(Z < 0{,}31) - (1 - P(Z < 0{,}51)) =$$
$$= 0{,}6217 - 1 + 0{,}695 = 0{,}3167$$

d) $P(\text{3 hijas}) = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$X \equiv B(100;\ 0{,}125)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 12{,}5 > 5 \\ n(1-p) = 87{,}5 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100;\ 0{,}125) \approx N(12{,}5;\ 0{,}33)$$

$$P(X = 12) = P(11{,}5 < X < 12{,}5) = P\left(\frac{11{,}5-12{,}5}{0{,}33} < \frac{X-12{,}5}{0{,}33} < \frac{12{,}5-12{,}5}{0{,}33}\right) =$$
$$= P(-3 < Z < 0) = P(Z < 3) - P(Z < 0) = 0{,}9987 - 0{,}5 = 0{,}4987$$

062 En un instituto se han comprado 150 ordenadores para 4 aulas de informática. La duración de la batería permite tener una media de trabajo de 180 minutos, con una desviación típica de 25 minutos.

a) Calcula la probabilidad de que la batería de uno de los ordenadores solo dure dos horas.
b) ¿Cuántos ordenadores tendrán una batería cuya carga dure más de 200 minutos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que 110 de esos ordenadores sigan trabajando a los 180 minutos?

a) $X \equiv N(180,\ 25)$

$$P(X \leq 120) = P\left(\frac{X-180}{25} \leq \frac{120-180}{25}\right) = P(Z \leq -2{,}4) = 1 - P(Z < 2{,}4) =$$
$$= 1 - 0{,}9918 = 0{,}0082$$

b) $$P(X > 200) = P\left(\frac{X-180}{25} > \frac{200-180}{25}\right) = P(Z > 0{,}8) = 1 - P(Z \leq 0{,}8) =$$
$$= 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119$$

Como $0{,}2119 \cdot 150 = 31{,}785$; en 31 ordenadores la carga de la batería durará más de 200 minutos.

c) $$P(X \geq 180) = P\left(\frac{X-180}{25} \geq \frac{180-180}{25}\right) = P(Z \geq 0) = 1 - P(Z < 0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

$Y \equiv B(150;\ 0{,}5)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 75 > 5 \\ n(1-p) = 75 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow Y \equiv B(150;\ 0{,}5) \approx N(75;\ 6{,}12)$$

$$P(Y = 110) = P(109{,}5 < Y < 110{,}5) = P\left(\frac{109{,}5-75}{6{,}12} < \frac{Y-75}{6{,}12} < \frac{110{,}5-75}{6{,}12}\right) =$$
$$= P(5{,}62 < Z < 5{,}8) = P(Z < 5{,}8) - P(Z < 5{,}62) = 1 - 1 = 0$$

063 La estatura de los 1.200 alumnos de un colegio sigue una distribución normal, de media 156 cm y desviación típica 9 cm.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno seleccionado al azar mida más de 180 cm?
b) ¿Cuántos estudiantes debemos esperar que midan entre 140 y 170 cm?

c) Busca un intervalo de alturas que contenga el 90 % de los alumnos y que sea el mínimo posible.
d) Si elijo 10 alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 6 de ellos midan más de 165 cm?
e) Si elijo 40 alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 10 que midan más de 165 cm?

a) $P(X > 180) = P\left(\frac{X-156}{9} > \frac{180-156}{9}\right) = P\big(Z > 2{,}67\big) = 1 - P\big(Z \le 2{,}67\big) =$
$= 1 - 0{,}9962 = 0{,}0038$

b) $(140 < X < 170) = P\left(\frac{140-156}{9} < \frac{X-156}{9} < \frac{170-156}{9}\right) =$
$= P(-1{,}78 < Z < 1{,}56) = P\big(Z < 1{,}56\big) - (1 - P(Z < 1{,}78)) =$
$= 0{,}9406 - 1 + 0{,}9625 = 0{,}9031$

Como $0{,}9031 \cdot 1.200 = 1.083$, hay 1.083 estudiantes que miden entre 140 y 170 cm.

c) $P(156 - a < X < 156 + a) = P\left(\frac{156-a-156}{9} < \frac{X-156}{9} < \frac{156+a-156}{9}\right) =$
$= P\left(-\frac{a}{9} < Z < \frac{a}{9}\right) = P\left(Z < \frac{a}{9}\right) - \left(1 - P\left(Z < \frac{a}{9}\right)\right) =$
$= 2P\left(Z < \frac{a}{9}\right) - 1 = 0{,}9 \rightarrow P\left(Z < \frac{a}{9}\right) = 0{,}95 \rightarrow \frac{a}{9} = 1{,}65$
$\rightarrow a = 14{,}85 \rightarrow (141{,}15;\ 170{,}85)$ es el intervalo de alturas.

d) $P(X > 165) = P\left(\frac{X-156}{9} > \frac{165-156}{9}\right) = P\big(Z > 1\big) = 1 - P\big(Z \le 1\big) =$
$= 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

$Y \equiv B(10;\ 0{,}1587)$

$P(Y = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0{,}1587^6 \cdot 0{,}8413^4 = 0{,}0017$

e) $Y' \equiv B(40;\ 0{,}1587)$

$\left.\begin{array}{l} np = 6{,}348 > 5 \\ n(1-p) = 33{,}652 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow Y \equiv B(40;\ 0{,}1587) \approx N(6{,}348;\ 2{,}31)$

$P(Y' > 10) = P\left(\frac{Y'-6{,}348}{2{,}31} > \frac{10-6{,}348}{2{,}31}\right) = P\big(Z > 1{,}58\big) = 1 - P\big(Z \le 1{,}58\big) =$
$= 1 - 0{,}719 = 0{,}281$

064 El peso de los recién nacidos se distribuye según una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Si los últimos datos publicados aseguran que los percentiles 75 y 90 de esta distribución son 3,2 y 3,5 kg, respectivamente:

a) Calcula la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,5 kg.
b) Halla la probabilidad de que un recién nacido pese más de 4 kg.
c) ¿Cuál es el percentil 10?
d) Determina la mediana de la distribución.

$$P(X < 3{,}2) = 0{,}75 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3{,}2-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{3{,}2-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{3{,}2-\mu}{\sigma} = 0{,}68$$

$$P(X < 3{,}5) = 0{,}9 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9 \rightarrow \frac{3{,}5-\mu}{\sigma} = 1{,}29$$

$$\left.\begin{array}{l} 3{,}2-\mu = 0{,}68\sigma \\ 3{,}5-\mu = 1{,}29\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 2{,}86 \\ \sigma = 0{,}49 \end{array}$$

a) $P(X < 2{,}5) = P\left(\frac{X-2{,}86}{0{,}49} < \frac{2{,}5-2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z < -0{,}73\right) = 1 - P(Z \le 0{,}73) =$
$= 1 - 0{,}7673 = 0{,}2327$

b) $P(X > 4) = P\left(\frac{X-2{,}86}{0{,}49} > \frac{4-2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z > 2{,}32\right) = 1 - P(Z \le 2{,}32) =$
$= 1 - 0{,}9898 = 0{,}0102$

c) $P(X < a) = 0{,}1 \rightarrow P\left(\frac{X-2{,}86}{0{,}49} < \frac{a-2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z < \frac{a-2{,}86}{0{,}49}\right) = 0{,}1$
$\rightarrow P\left(Z \le -\frac{a-2{,}86}{0{,}49}\right) = 0{,}9 \rightarrow -\frac{a-2{,}86}{0{,}49} = 1{,}29 \rightarrow a = 2{,}23$

d) $P(X \le M) = 0{,}5 \rightarrow P\left(\frac{X-2{,}86}{0{,}49} \le \frac{M-2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z \le \frac{M-2{,}86}{0{,}49}\right) = 0{,}5$
$\rightarrow \frac{M-2{,}86}{0{,}49} = 0 \rightarrow M = 2{,}86$

065 El sueldo de los trabajadores de una empresa sigue una distribución normal de media 1.500 €. Si el sueldo de un técnico de categoría 3 es de 960 €, y el 75 % de los trabajadores de la empresa cobra más que él:

a) Calcula la probabilidad de que el sueldo de un empleado escogido al azar sea superior a 1.600 €.
b) El sueldo más elevado es el de los directivos. Si estos representan el 5 % de los empleados de la empresa, ¿cuál es su sueldo mínimo?

$P(X > 960) = 0{,}75 \rightarrow P\left(\frac{X-1.500}{\sigma} > \frac{960-1.500}{\sigma}\right) = P\left(Z > -\frac{540}{\sigma}\right) =$
$= P\left(Z < \frac{540}{\sigma}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{540}{\sigma} = 0{,}68 \rightarrow \sigma = 794{,}12$

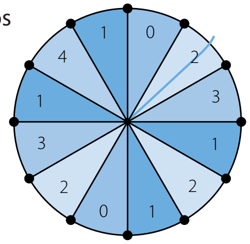
a) $P(X > 1.600) = P\left(\frac{X-1.500}{794{,}12} > \frac{1.600-1.500}{794{,}12}\right) = P\left(Z > 0{,}13\right) = 1 - P(Z \le 0{,}13) =$
$= 1 - 0{,}5517 = 0{,}4483$

b) $P(X \ge a) = 0{,}05 \rightarrow P\left(\frac{X-1.500}{794{,}12} \ge \frac{a-1.500}{794{,}12}\right) = P\left(Z \ge \frac{a-1.500}{794{,}12}\right) = 0{,}05$
$\rightarrow P\left(Z < \frac{a-1.500}{794{,}12}\right) = 0{,}95 \rightarrow \frac{a-1.500}{794{,}12} = 1{,}65 \rightarrow a = 2.810{,}29$

El sueldo mínimo de los directivos es de 2.810,29 euros.

PARA FINALIZAR...

066 **El barquillero del parque entrega en cada tirada los barquillos que indica el número en que se para la flecha.**
Si cada barquillo le cuesta 3 céntimos y cobra 20 céntimos por 3 tiradas. ¿Cuánto dinero, por término medio, ganará después de 100 tiradas?



N.º de barquillos	f_i	h_i
0	2	$\frac{2}{12}$
1	4	$\frac{4}{12}$
2	3	$\frac{3}{12}$
3	2	$\frac{2}{12}$
4	1	$\frac{1}{12}$
	12	1

Media de barquillos:

$$\overline{x} = 0 \cdot \frac{2}{12} + 1 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot \frac{3}{12} + 3 \cdot \frac{2}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12} =$$

$$= \frac{4+6+6+4}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

Por término medio en cada tirada gana:

$$20 - \frac{5}{3} - 3 = 15 \text{ céntimos}$$

En 100 tiradas:

$100 \cdot 15 = 1.500$ céntimos $= 15{,}00$ €

067 **La probabilidad de que un reloj sea defectuoso es del 4 %. Halla.**

a) El número de relojes defectuosos que se estima en un lote de 1.000.

b) La probabilidad de menos de 10 defectuosos.

a) $\mu = 1.000 \cdot 0{,}04 = 40$ relojes

b) $B(1.000; 0{,}04) \approx N(40; 6{,}19)$

$$P(X < 10) = \left(\frac{X-40}{6{,}19} < \frac{10-40}{6{,}19}\right) = P\left(Z < -4{,}84\right) = 1 - P\left(Z < 4{,}84\right) = 0$$

068 **En una distribución normal, el 3 % de los valores es inferior a 19 y el 5 % es superior a 28,6. Calcula $P(X < 18)$.**

$$P(X < 19) = 0{,}03 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{19-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{19-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}03$$

$$\rightarrow P\left(Z \leq -\frac{19-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}97 \rightarrow -\frac{19-\mu}{\sigma} = 1{,}89 \rightarrow 19 - \mu = -1{,}89\sigma$$

$$P(X > 28{,}6) = 0{,}05 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{28{,}6-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{28{,}6-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05$$

$$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{28{,}6-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}95 \rightarrow \frac{28{,}6-\mu}{\sigma} = 1{,}65 \rightarrow 28{,}6 - \mu = 1{,}65\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} 19 - \mu = -1{,}89\sigma \\ 28{,}6 - \mu = 1{,}65\sigma \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = 24{,}13 \\ \sigma = 2{,}71 \end{array}\right.$$

$$P(X < 18) = P\left(\frac{X-24{,}13}{2{,}71} < \frac{18-24{,}13}{2{,}71}\right) = P(Z < -2{,}26) = 1 - P(Z \leq 2{,}26) =$$

$$= 1 - 0{,}9881 = 0{,}0119$$

069 Las bolas para rodamiento se someten a un control de calidad consistente en eliminar las que pasan por un orificio de diámetro d y, también, las que no pasan por otro orificio de diámetro D, con $d < D$.

Calcula la probabilidad de eliminar una bola, sabiendo que la medida de sus diámetros sigue una distribución normal de parámetros: $N\left[\frac{D+d}{2};\ 0,3(D-d)\right]$.

$$P(X<d)+P(X>D)=P\left(\frac{X-\frac{D+d}{2}}{0,3(D-d)}<\frac{d-\frac{D+d}{2}}{0,3(D-d)}\right)+P\left(\frac{X-\frac{D+d}{2}}{0,3(D-d)}>\frac{D-\frac{D+d}{2}}{0,3(D-d)}\right)=$$

$$=P\left(Z<\frac{\frac{d-D}{2}}{0,3(D-d)}\right)+P\left(Z>\frac{\frac{D-d}{2}}{0,3(D-d)}\right)=$$

$$=P\left(Z<-\frac{1}{0,6}\right)+P\left(Z>\frac{1}{0,6}\right)=P(Z<-1,67)+P(Z>1,67)=$$

$$=2P(Z>1,67)=2(1-0,9525)=0,095$$

070 Una máquina tiene 800 componentes y la probabilidad de que, en un tiempo determinado, falle uno de ellos es $2\cdot 10^{-4}$. Calcula la probabilidad de que en ese tiempo:

a) Falle al menos 1 componente.

b) Fallen exactamente 2 componentes.

c) Fallen, como máximo, 2 componentes.

d) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

$X \equiv B(800;\ 0{,}0002)$

$800\cdot 0{,}0002=0{,}16<5 \rightarrow$ No se puede aproximar con una distribución normal.

a) $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{800}{0}\cdot 0{,}0002^0\cdot 0{,}9998^{800}=$

$=1-0{,}8521\simeq 0{,}1479$

b) $P(X=2)=\binom{800}{2}\cdot 0{,}0002^2\cdot 0{,}9998^{798}=319.600\cdot 4\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}8724\simeq 0{,}001$

c) $P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\binom{800}{0}\cdot 0{,}0002^0\cdot 0{,}9998^{800}+$

$+\binom{800}{1}\cdot 0{,}0002^1\cdot 0{,}9998^{799}+\binom{800}{2}\cdot 0{,}0002^2\cdot 0{,}9998^{798}=$

$=0{,}8521+800\cdot 0{,}0002\cdot 0{,}8523+319.600\cdot 4\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}8224\simeq 0{,}9894$

d) $\mu=800\cdot 0{,}0002=0{,}16$

$\sigma=\sqrt{800\cdot 0{,}0002\cdot 0{,}9998}=0{,}39$

Tablas de distribución

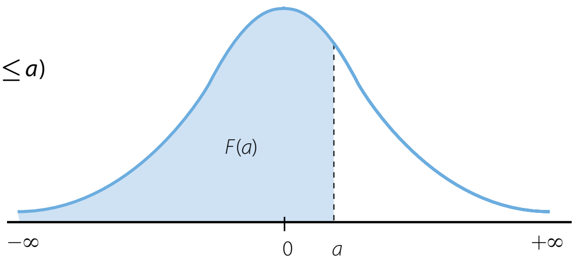
Tabla de distribución binomial $B(n, p)$

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}$$

		p									
n	r	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8001	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4001	0,4500	0,5000
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0312
	1	0,2036	0,3280	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1562
	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0004	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1562
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0312
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6		0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6		0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
	7			0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0312
	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
	4	0,0004	0,0046	0,0815	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	6		0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
	7			0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0312
	8				0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039

Tabla de distribución normal $N(0, 1)$

$F(a) = P(Z \leq a)$



a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000